Cuadernos de Economía Vol. 13. 205-213. 1.985.

Teorema sobre bienes autorreproducibles.

Alfons Barceló

Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, s/n – 08034 Barcelona

La relación de precios teóricos de dos bienes autorreproducibles que utilicen de forma destacada el mismo género de input (trabajo, tierra, alimento) es igual al producto de la razón entre las "tasas específicas de excedente" de dichos bienes y la razón de las cantidades de dichos bienes apropiadas para una cantidad dada de aquel "input distinguido".

Esta proposición es un firme candidato a *ley económica*. Merece subrayarse el hecho de que su validez no depende del marco institucional, que se obtiene a partir de datos escrutables y que provee un resultado preciso e históricamente contrastable.

The relation of theorical prices of two self-reproducing goods that utilize in detached form the same mode of input (labour, soil, food) is equal to the product of the ratio between the "specific rates of surplus" of such goods and the ratio of the adequate quantities of these goods for a given quantity of that "prominent input".

This proposition is a strong candidate to become an *economic law*. It is worthwhile to emphasize the fact that its validity does not depend on the institutional framework, that is obtained from existing data, and that will provide a accurate and historically significant result.

0.– Esta nota pretende demostrar que bajo condiciones fuertemente restrictivas, pero que no son disparatadas y que son históricamente ilustrables, cabe expresar el precio relativo de dos bienes autorreproducibles como función de la razón entre sus tasas específicas de excedente, por un lado, y de la razón entre cantidades idóneas de dichos bienes para un input común dado, por otro. Concretamente:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\tau_B}{\tau_A} \cdot \frac{b}{a}$$

1.– Buena parte de la actividad económica se apoya ineludiblemente sobre ciclos biológicos, físicos y químicos caracterizados con frecuencia por propiedades reproductivas. Eso es especialmente visible en aquellos vegetales que operan como capital circulante y tienen períodos de maduración claramente determinados. Es el caso de algunos cultivos a base de semillas y con ciclo corto: cereales y leguminosas son ejemplos paradigmáticos de tal categoría. Para dichos bienes es inmediato el cálculo de la razón entre cantidad cosechada y cantidad sembrada. Conviene subrayar desde luego que tal cociente no suministra toda la información pertinente, ni siquiera para la determinación de este índice reproductivo. Dado que no existe producción instantánea, salvo en algunos textos de teoría económica, es preciso indicar el lapso temporal, pues tal cociente no es propiamente un número puro, sino que está afectado de dimensionalidad T^{-1} . Supondremos, sólo de momento, que el tiempo de maduración es un "año". Definimos, para un bien A con las características apuntadas,

$$\alpha_A = \frac{O_A}{I_A} \quad ; \tau_A = \alpha_A - 1$$

(O: cantidad cosechada; I: cantidad sembrada; ambas expresadas en la misma unidad técnica, sean sacos, litros, kilos).

2.– Naturalmente, los bienes no se autorreproducen por ensalmo, sino que requieren la colaboración de gran cantidad de factores, que se pueden englobar bajo epígrafes tales como *recursos naturales, medios de producción* y distintos tipos de *trabajos* concretos (Barceló, 1981). Una representación pormenorizada de los diversos ingredientes que actúan en tales procesos es la vía teórica más adecuada y esclarecedora (Sraffa, 1960), si bien hay que conceder que para muchos fines resulta poco operativa. En cambio, si suponemos que es razonable considerar un elemento como especialmente distinguido, podremos simplificar enormemente la expresión de una *línea de producción* y de la correspondiente *ecuación de producción*. En el caso que estamos esbozando, una superficie agrícola dada (para la cual la cantidad idónea de simiente es *a*) viene a ser el candidato merecedor de atención preferente.

3.– Para ilustrar las anteriores consideraciones y evaluar su pertinencia, tal vez sea ahora oportuno orientar nuestra mirada hacia un ejemplo concreto sobre el que se puedan aplicar nuestros supuestos y examinar luego los resultados (Barceló, 1985).

Documentos referentes a la agricultura en Cataluña occidental de principios del siglo XVIII refieren que la proporción más frecuente entre cosecha y simiente era de 4 para el trigo y de 5 para la cebada. También informan que la cantidad usual de simiente por unidad de superficie ("jornal") era de 2 "quarteres" (unidad de capacidad) si se sembraba exclusivamente trigo y de 3 "quarteres", si sólo cebada. Supongamos (y éstas son las condiciones fuertemente restrictivas que mencionábamos al comienzo) que el valor del conjunto de los demás inputs sea equiparable, entonces para que sea compatible el cultivo de trigo y de cebada debe cumplirse a la vez:

$$2\,P_T + R_T = 8\,P_T$$

$$3\,P_C + R_C = 15\,P_C$$

(P_T: precio de la "quartera" de trigo; P_C: precio de la "quartera" de cebada; R: suma de los restantes inputs y valores añadidos).

Del anterior sistema de ecuaciones, suponiendo $R_T = R_C$, se desprende inmediatamente que

$$P_C = 1/2\, P_T$$

o sea, que el precio de la "quartera" de cebada es, teóricamente, igual a la mitad del precio de la "quartera" de trigo. Este resultado es congruente con los precios efectivos históricamente registrados (López de Peñalver, 1812), con lo que hemos obtenido una primera aproximación altamente satisfactoria y con potencia explicativa.

4.– El halagüeño resultado presentado en el parágrafo anterior invita a una formulación genérica de los razonamientos implícitos utilizados. Sean, pues, dos bienes autorreproducibles, A y B, con el mismo período de maduración y utilizadores del mismo *input distinguido*, I, según cantidades técnicamente apropiadas, *a* y *b*, respectivamente; entonces vale escribir:

$$a\,P_A + I + R_A = (1 + \tau_A)\, a\, P_A$$

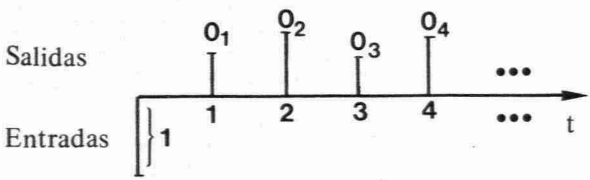
$$b\,P_B + I + R_B = (1 + \tau_B)\, b\, P_B$$

Y, suponiendo que $R_A = R_B$, esto es, que son equivalentes los demás inputs y valores añadidos correspondientes a uno y otro, es inmediato concluir que

$$\boxed{\frac{P_A}{P_B} = \frac{\tau_B}{\tau_A} \cdot \frac{b}{a}}$$

5.– Este teorema no es vacuamente verdadero, como acontece con frecuencia en teoría económica, pero tiene un limitado interés a menos que consigamos ampliar su dominio de aplicabilidad. Por tanto, es preciso ver si se pueden homogeneizar las τ cuando los bienes tienen diferente periodicidad, y si será factible *extender la definición de* τ, de manera que sea predicable de aquellos medios de producción animales y vegetales que operan como capital fijo. Ambas cuestiones se hallan conectadas y formalmente pueden resolverse a la vez, aunque a costa de una importante mengua de aptitud operacional.

Para sortear los escollos es útil adoptar el punto de vista de que "una gallina es simplemente el procedimiento que utiliza un huevo para hacer otro huevo". Con esta óptica, τ es formalmente análoga a la tasa interna de rentabilidad de una inversión, una especie de "tasa propia de interés bruto". Entendidos de ese modo, los procesos autorreproductivos son representables mediante una sucesión de flujos cuantificados y fechados según el siguiente esquema:



Adviértase que tal esquema sólo recoge elementos homogéneos, las replicaciones del bien de referencia que van produciéndose a lo largo de la vida económica ideal del elemento contabilizado en la entrada.

Para calcular la τ de un bien autorreproducible determinado pueden adoptarse los algoritmos de cualquier texto de matemática financiera destinados a hallar la tasa interna de rentabilidad. En general, para el caso discreto, se trata de determinar el valor de τ que verifica la siguiente igualdad

$$1 = \sum_{t=1}^{n} \frac{O_t}{(1+\tau)^t}$$

lo que viene a decir que la entrada ha de igualarse al flujo de salidas actualizadas con el parámetro desconocido τ.

Nótese que la nueva caracterización de τ contiene a la definición originaria como caso particular (una sola salida en el momento 1) y permite asignar a cada bien autorreproducible un indicador con la misma dimensionalidad que los demás. Adviértase que tanto en la representación como en el cálculo los elementos contabilizados han de ser homogéneos (huevos, terneras, patatas, etc.), lo que no excluye el uso de agrupamientos de bienes siempre que se mantengan fijas las proporciones entre sus componentes.

Repárese además en que τ no es un parámetro exclusivamente biológico. Primero, porque la selección artificial de animales y plantas, así como la regulación de los procesos de reproducción, van modificando esa magnitud. En segundo lugar, y como argumento decisivo, porque hay la posibilidad de *truncamiento*, si se da el caso (frecuente) de que la "fecundidad" es decreciente a partir de determinado momento. No es necesario esperar a que un árbol frutal, por ejemplo, agote por completo sus posibilidades para arrancarlo. Se trata de la vieja cuestión de que vida técnica y vida económica en general no coinciden (von Neumann, 1937). La determinación del momento apropiado para dicho truncamiento es un problema económico y no puramente técnico (Schefold, (1977). Puesto que no nos interesa ahondar ahora en este asunto, a efectos prácticos podemos dar por bueno el flujo de replicaciones que los expertos toman en cuenta o aconsejan a los usuarios en los manuales de agronomía y zootecnia.

6.– Conocido el valor de τ, es fácil construir una *pirámide de población* ideal cuya estructura se mantenga intacta a lo largo del tiempo y genere "anualmente" un excedente homotético, esto es, cuyos componentes sean elementos de las distintas cohortes en proporciones balanceadas idénticas a las proporciones de partida y en cantidades iguales a τ veces la cantidad originaria. Dicha pirámide de población se comporta entonces (como un todo) del mismo modo que los bienes considerados al principio, por lo que le es también aplicable el teorema.

También puede procederse a la inversa, esto es, hallando –antes de conocer τ– la pirámide de población que se comportaría homotéticamente y sobre esa base definir $\tau + 1$ como el cociente entre el vector representativo de dicha pirámide en el momento $t+1$ y el vector correspondiente al momento t. Para que dicho cociente sea un número es condición necesaria que las dos pirámides poblacionales sean homotéticas. Si se utiliza la vía más rápida indicada en la sección precedente, τ aparece como un concepto no observacional del tipo *variable intermedia*; en cambio, si se utiliza el camino que acabamos de apuntar, aparece como propiedad elemental de una *construcción hipotética* (Bunge, 1969) (Véase el *Apéndice*).

La configuración de dicha pirámide será la siguiente: cada cohorte ideal de edad t tiene un número de miembros igual a $1 + \tau$ veces el número de miembros de la cohorte de edad $t + 1$. Conviene advertir, no obstante, que cuando hay que ajustar los períodos de producción de dos bienes según el mínimo común múltiplo, algunas de estas cohortes ideales quizás tengan una contrapartida larvada, con lo cual se esfumará la posibilidad de concebir los excedentes homotéticos mencionados como potencialmente reales, aunque sea posible establecer *otra* configuración realista (pero no homotética) de estado estacionario con generación periódica de excedentes iguales.

En definitiva, el teorema conserva su validez con las generalizaciones desarrolladas, si bien perderá precisión operativa, puesto que en rigor la relación de precios no se refiere en esos casos a dos bienes claramente tipificados, sino a dos poblaciones balanceadas idealmente. También hay que decir que la existencia eventual de *producción conjunta* en su acepción tradicional (terneros y leche, carne y lana, trigo y paja) constituye una complicación adicional que, aquí, será pasada por alto.

7.— Veamos, para terminar, qué se puede hacer con el *input distinguido*. Gracias a las extensiones apuntadas, el input distinguido podrá ser concebido asimismo como una cantidad dada de alimento homogéneo, con lo que *a* y *b* indicarían el tamaño de la población balanceada que puede ser alimentada durante un "año" con dicha cantidad de alimento.

Es obvio que históricamente el trabajo directo en tareas de recolección ha sido a menudo el input distinguido. También vale considerar como input distinguido, en agriculturas extensivas muy mecanizadas, las horas máquina de una cosechadora polivalente. En ambos casos los valores de *a* y *b* se determinarían, por ejemplo, en función de las cantidades de uno u otro producto recolectadas o cosechadas en un día. Si estas cantidades son *f* y *g* respectivamente, los valores de *a* y *b* se determinan del siguiente modo:

$$a = \frac{f}{(1 + \tau_A)} \quad ; \quad b = \frac{g}{(1 + \tau_B)}$$

8.— La conclusión de todo lo que antecede es que la relación establecida constituye una genuina *ley económica*, que tiene validez restringida, pero que recubre fenómenos estratégicos de la historia humana y ofrece para ellos una aproximación explicativa bien fundamentada y cuantitativamente precisa. Sólo cuando los valores de τ son muy elevados la potencia explicativa del teorema se diluye, aunque pueda ser formalmente aplicado.

Vale la pena recalcar que aparece como especialmente interesante la vinculación de variables económicas primordiales, como los precios, con propiedades bioeconómicas, lo que apunta hacia una contextualización y sistematicidad muy deseables en las investigaciones de teoría económica, aunque por desgracia sean inusuales. Finalmente, hay que subrayar que todos los conceptos utilizados son perfectamente escrutables y que la ley es de fácil contrastación, rasgos ambos que son más bien insólitos, aunque parezca mentira.

9.— También merece subrayarse la *significación epistemológica* de la ley aquí presentada. Habida cuenta, sobre todo, de que algunos lectores de las primeras versiones multicopiadas se hallaron en fuera de juego a la hora de evaluar cabalmente su sentido y consecuencias, a pesar de la extrema simplicidad formal y conceptual del teorema.

Es sabido que el cambio de marco teórico provoca espontáneamente cierta ofuscación. Cuando ya ha pasado a ser psicológicamente indiscutible para muchos que los precios se determinan por oferta y demanda, que la economía estudia la asignación de recursos escasos entre medios alternativos o que la teoría económica se reduce a resolver problemas de optimización, resulta sin duda desconcertante encontrarse con un ejemplo preciso –limitado, pero históricamente notable– en el que no se mencionan máximos ni mínimos, no se asigna nada y no juegan ningún papel explicativo ni la demanda ni la oferta. Por consiguiente es hasta cierto punto sólito que su carácter iconoclasta presente visos de "impensabilidad".

La onda expansiva del teorema tiene también efectos higiénicos (o destructivos, según se mire) sobre otros enfoques. En efecto, constituye una anomalía difícil de digerir para aquellos marxistas que aseveran que no hay leyes económicas "transistémicas" o que afirman que en los modos de producción precapitalistas no es posible establecer leyes económicas dado que, en tales contextos, no es separable la economía del conjunto de manifestaciones sociales. Asimismo –aunque el teorema es perfectamente congruente con una concepción racional de la teoría del valor trabajo– provoca fisuras en los planteamientos fundamentalistas de "la ley del valor". Vale señalar que también está reñido con el institucionalismo radical, por cuanto muestra una ley económica genuina que no aparece afectada de manera sensible por el marco sociopolítico y es predicable indistintamente de economías esclavistas, feudales, capitalistas o socialistas.

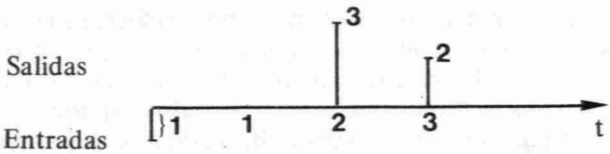
El teorema constituye, en resolución, un contraejemplo punzante de cara a muchas proposiciones generales explícitas o implícitas. Y no puede ser tachado de caso marginal o de anomalía secundaria, porque aun cuando su dominio de aplicabilidad sea muy restringido, el subconjunto de bienes económicos a los que se refiere contiene elementos estratégicos tanto desde el punto de vista histórico como desde el punto de vista de los requerimientos biológicos de la existencia humana.

Lo que viene a decir taxativamente es que no deben buscarse los determinantes fundamentales de los precios en las condiciones de los intercambios. El principio reforzado por el teorema es que el principal factor explicativo del *valor* como propiedad social emergente (haya o no intercambios) son las condiciones objetivas de *compatibilidad* de la producción y reproducción económica.

APENDICE

El siguiente ejemplo numérico está destinado a ilustrar cómo se calcula la población balanceada ideal y después τ, o bien τ y luego la población.

Imaginemos una pareja de seres vivos (V) monógamos cuya fecundidad se agota pasado el tercer período de su vida. Supongamos que, en promedio, producen tres parejas al final del segundo período y dos, al final del tercero. El esquema de flujos puede representarse así:



Expresemos la misma situación mediante líneas de producción que escamoteen todos los demás elementos y factores imbricados en estas transformaciones. Entonces,

$$\begin{array}{lcl} V_O & \longrightarrow & V_1 \\ V_1 & \longrightarrow & V_2 \oplus 3\,V_0 \\ V_2 & \longrightarrow & 2\,V_0 \end{array}$$

Hallar una pirámide de población balanceada es equivalente a encontrar unos multiplicadores (x_1, x_2, x_3) tales que, aplicados a estas líneas de producción, conviertan en colineales (proporcionales) los vectores representativos de inputs y outputs totales. O sea,

$$(x_1 V_0, x_2 V_1, x_3 V_2)\ P\ ((3x_2 + 2x_3)V_0, x_1 V_1, x_2 V_2)$$

La condición de proporcionalidad se cumplirá si

$$\frac{3x_2 + 2x_3}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

Dado que tenemos libertad para fijar la unidad de escala, podemos hacer $x_3 = 1$. Con algunos pasos sencillos se llega en seguida al resultado de que $X = (x_1, x_2, x_3) = (4,2,1)$. Es decir, la población balanceada estaría formada por una cohorte con 4 V_0, otra con 2 V_1 y la tercera con 1 V_2. En tal caso el cociente entre output total e input total será factible y determinará $\alpha_V = 2$. En consecuencia, $\tau_V = 1$.

El otro camino consiste en utilizar la fórmula de actualización para determinar τ como primer objetivo. Con los datos que manejamos se trata de encontrar el valor de τ_V que satisface la siguente ecuación;

$$1 = \frac{3}{(1+\tau_V)^2} + \frac{2}{(1+\tau_V)^3}$$

En este caso el resultado es inmediato: $\tau_V = 1$. Lüego se procede a diseñar la pirámide ideal. Tomando $x_3 = 1$, por ejemplo, determinaremos $x_2 = (1 + \tau_V)x_3$ y $x_1 = (1 + \tau_V)^2\ x_3$, con lo que obtenemos de nuevo los valores ya hallados por la otra vía.

BIBLIOGRAFIA

BARCELO, A. (1981), *Reproducción económica y modos de producción.* Barcelona, Serbal.

BARCELO, A. (1985), *Modelització econòmica a partir de dades històriques,* Recerques, 18 (en prensa).

BUNGE, M. (1969), *La investigación científica.* Barcelona, Ariel (Traducción de M. Sacristán).

LOPEZ DE PEÑALVER, J. (1812), *Reflexiones sobre la variación del precio del trigo.* Madrid, Imprenta de Sancha.

NEUMANN, J. von (1937), *Uber ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes,* Ergebnisse eines Matematischen Kolloquiums, vol. VIII, págs. 73-83. (Versión castellana contenida en *El modelo de von Neumann,* Servicio de Publicaciones de la Facultad de Económicas de Barcelona).

SRAFFA, P. (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities.* Cambridge University Press. (Existen versiones en castellano y en catalán).

SCHEFOLD, B. (1977), "Capitale fisso, accumulazione e progresso tecnico", in Pasinetti, L. (a cura di): *Contributi alla teoria della produzione congiunta.* Bologna, Mulino.